TITLE:
Global asymptotic stability for half-linear differential equations with bounded coefficients(Functional Equations Based upon Phenomena)

AUTHOR(S):
鬼塚, 政一; 杉江, 実郎

CITATION:
鬼塚, 政一 ...[et al]. Global asymptotic stability for half-linear differential equations with bounded coefficients(Functional Equations Based upon Phenomena). 数理解析研究所講究録 2007, 1547: 68-77

ISSUE DATE:
2007-04

URL:
http://hdl.handle.net/2433/80803

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
第 1547 巻 2007 年 68-77

Global asymptotic stability for half-linear differential equations with bounded coefficients

島根大学 総合理工学研究科　鬼塚政一 (Masakazu Onitsuka)
島根大学 総合理工学部　杉江実郎 (Jitsuro Sugie)
Department of Mathematics
Shimane University

1 Introduction

減衰項をもつ 2 階半分線形微分方程式

$$(a(t)\phi_p(x'))' + b(t)\phi_p(x') + c(t)\phi_p(x) = 0 \tag{H}$$

を考える。ただし，$' = d/dt$ とし，係数 $a(t), b(t), c(t)$ は任意の $t > 0$ において区分的連続関数とする。また，パラメータ p は 1 より大きい値とし，実数値関数 $\phi_p(z)$ を

$$\phi_p(z) = |z|^{p-2}z$$

と定義する。線形微分方程式では，解の定数倍も解になることと，二つの解の和も解になることは周知の事実であるが，本研究で対象とする微分方程式 (H) では，前者は成り立つが，後者は成り立たない。即ち，微分方程式 (H) は線形微分方程式の特質の半分だけをもつことから，一般に半分線形微分方程式と呼ばれる（例えば，[1,3,4] を参照せよ)。

任意の $t > 0$ において $a(t) \neq 0$ ならば，方程式 (H) は方程式系

$$\begin{aligned} x' &= \phi_{p^*}\left(\frac{y}{a(t)}\right), \\ y' &= -\frac{b(t)}{a(t)}y - c(t)\phi_p(x) \end{aligned} \tag{S}$$

に同値変換される。ただし，p^* は

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$$

をみたす値である。このとき，$\phi_{p^*}(w)$ は $w = \phi_p(z)$ の逆関数になる。また，$p > 1$ であるから，p^* も 1 より大きな値となる。

方程式系 (S) は零解 $(x(t), y(t)) \equiv (0,0)$ をもつ。本研究の目的は方程式系 (S) の零解が大域的漸近安定になるための十分条件を与えることである。ここで言う，零解の大域的漸近安定性とは，零解が安定であって，すべての解が $(0,0)$ に漸近することである。

係数 $a(t), b(t), c(t)$ がそれぞれ定数 k, l, m であるとき，方程式 (H) は

$$k\,(\phi_p(x'))' + l\phi_p(x') + m\phi_p(x) = 0 \tag{1.1}$$

になる。この方程式 (1.1) に $x(t) = e^{\lambda t}$ を代入すれば，特性方程式

$$k(p-1)\phi_p(\lambda)\lambda + l\phi_p(\lambda) + m = 0 \tag{1.2}$$

が得られる。Sugie et al. [12] は方程式 (1.2) の根 λ の複素平面上での位置によって，方程式 (1.1) の解の漸近挙動が判定できることを示した。特に，方程式 (1.2) が実部が負の 2 根をもつための必要十分条件は

$$kl > 0 \quad \text{かつ} \quad km > 0 \tag{1.3}$$

であることから，自励系

$$x' = \phi_{p^*}(y),$$
$$y' = -\frac{l}{k}y - \frac{m}{k}\phi_p(x)$$

の零解が大域的漸近安定になるための必要十分条件も (1.3) であることが分かる。したがって，方程式系 (S) の零解の大域的漸近安定性を議論するとき，条件

$$a(t)b(t) > 0 \quad (t > 0) \quad \text{かつ} \quad \liminf_{t\to\infty} a(t)b(t) > 0 \tag{1.4}$$

や条件

$$a(t)c(t) > 0 \quad (t > 0) \quad \text{かつ} \quad \liminf_{t\to\infty} a(t)c(t) > 0 \tag{1.5}$$

の下で考えることは妥当であろう。本研究でも，条件 (1.5) を仮定する。しかし，条件 (1.4) は仮定せず，$a(t)$ と $b(t)$ は同符号である必要はないものとする。

Theorem 1. 係数 $a(t), b(t), c(t)$ は任意の $t > 0$ において有界であり，条件 (1.5) をみたすと仮定する。このとき，関数

$$\psi(t) = \frac{p^* b(t)}{a(t)} + \frac{(\phi_{p^*}(a(t))c(t))'}{\phi_{p^*}(a(t))c(t)} \tag{1.6}$$

が任意の $t > 0$ において非負かつ weakly integrally positive であるならば，方程式系 (S) の零解は大域的漸近安定である。

上記の定数係数の場合，条件 (1.3) が成り立てば，Theorem 1 のすべての条件が満たされることを注意しておく。

Theorem 1 の条件の一つである weakly integrally positive の定義は次節で与えるが，積分条件

$$\int^{\infty} \psi(t)dt = \infty \tag{1.7}$$

を強めたものである。条件 (1.7) を仮定するだけでは，方程式系 (S) の零解が大域的漸近安定とならないことが知られている（例えば [8,9] を見よ)。

本稿の概要は次の通りである。第 2 節では，Theorem 1 の証明を与える。証明はリヤプノフ関数を使った Hatvani [5] の手法を発展させる。第 3 節では，本研究で得られた結果の意味を明確にするため，二つの例を挙げる。また，その例における解軌跡のシミュレーションを与える。

2 Proof of the main theorem

前節でも述べたように，関数 $\psi(t)$ が条件 (1.7) を満足するだけでは方程式系 (S) の零解が大域的漸近安定になるとは限らない。そのため，Hatvani [8] は条件 (1.7) に替わるものとして，以下の条件を提案した。関数 $\psi(t)$ が integrally positive であるとは

$$\tau_n < \sigma_n < \tau_{n+1}, \qquad \sigma_n - \tau_n \geq \delta > 0$$

をみたす任意の集合 $I = \bigcup_{n=1}^{\infty}[\tau_n, \sigma_n]$ に対して

$$\int_I \psi(t)dt = \infty \tag{2.1}$$

となることをいう（[5–7, 11, 14] も見よ)。特に，ある数 $\Delta > 0$ 存在し

$$\tau_{n+1} \leq \sigma_n + \Delta$$

を満たすとき，$\psi(t)$ は weakly integrally positive という。例えば，$\psi(t) = 1/(1+t)$ や $\psi(t) = \sin^2 t/(1+t)$ は weakly integrally positive であるが，integrally positive ではない。明らかに，$\psi(t)$ が integrally positive や weakly integrally positive ならば，$\psi(t)$ の不定積分は発散する。即ち，条件 (1.7) が成り立つことになる。

証明は以下に示す 2 つのステップに分けて行う。

Step 1: 方程式系 (S) の零解は一様安定であり，すべての解は一様有界であることを示す。

Step 2: 方程式系 (S) のすべての解は $(0,0)$ に漸近することを背理法を用いて示す。

Step 1. リヤプノフ関数 $V(t,x,y)$ を

$$V(t,x,y) = \frac{|y|^{p^*}}{p^*\phi_{p^*}(a(t))c(t)} + \frac{|x|^p}{p} \tag{2.2}$$

と定義する。係数 $a(t)$ と $c(t)$ の仮定より，任意の $t > 0$ に対して

$$0 < \omega \leq \phi_{p^*}(a(t))c(t) \leq \alpha \tag{2.3}$$

を満たす値 α と ω を選ぶことができる。そのため，任意の $(t,x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^2$ に対して

$$\frac{|y|^{p^*}}{p^*\alpha} + \frac{|x|^p}{p} \leq V(t,x,y) \leq \frac{|y|^{p^*}}{p^*\omega} + \frac{|x|^p}{p}$$

となり，リヤプノフ関数 $V(t,x,y)$ は二つの正定値関数で上下から抑えられる。また，任意の $t > 0$ に関して一様に，$|x| + |y| \to \infty$ のとき

$$V(t,x,y) \to \infty$$

を満足する。さらに，関数 $\psi(t)$ が非負であることと条件 (1.5) から，任意の $t > 0$ に対して

$$\dot{V}_{(S)}(t,x,y) = -\frac{|y|^{p^*}\psi(t)}{p^*\phi_{p^*}(a(t))c(t)} \leq 0 \tag{2.4}$$

となる。したがって，リヤプノフの古典定理 (例えば [2, 10, 13] を見よ) より，方程式系 (S) の零解は一様安定であり，すべての解は一様有界であることが分かる（Step 1 終わり）。

Step 2. 方程式系 (S) の解を $(x(t), y(t))$ とし，その初期時刻を $t_0 > 0$ とする。Step 1 の事実から $x(t)$ と $y(t)$ は有界である。簡単のため

$$v(t) = V(t, x(t), y(t)) = \frac{|y(t)|^{p^*}}{p^* \phi_{p^*}(a(t))c(t)} + \frac{|x(t)|^p}{p} \tag{2.5}$$

と表す。不等式 (2.4) より，任意の $t \geq t_0$ に対して

$$v'(t) = -z(t)\psi(t) \leq 0 \tag{2.6}$$

となり，$v(t)$ は非増加関数である。したがって，$v(t)$ は非負の極限値 v_0 をもつ。係数 $a(t)$, $c(t)$ の有界性と (2.5) より，解 $(x(t), y(t))$ が $(0,0)$ に漸近することを証明するためには，$v_0 = 0$ であることを示せばよい。このことを背理法で示すため，$v_0 > 0$ と仮定する。

まず，任意の $t \geq t_0$ に対して

$$z(t) = \frac{|y(t)|^{p^*}}{p^* \phi_{p^*}(a(t))c(t)}$$

とおき，$\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$ となることを示す。条件 (1.5) と 係数 $a(t)$, $c(t)$ が任意の $t > 0$ において有界であることから，$z(t)$ も任意の $t \geq t_0$ において有界となる。そのため，$z(t)$ には下極限と上極限が存在する。

Claim 1: $\liminf_{t\to\infty} z(t) = 0$. もし $\liminf_{t\to\infty} z(t) > 0$ と仮定すれば，ある $\varepsilon_0 > 0$ と $T \geq t_0$ が存在し，任意の $t \geq T$ に対して $z(t) > \varepsilon_0$ である。任意の $t \geq t_0$ において $v(t) \geq 0$ であることと (2.6) から

$$v(t_0) \geq v(t_0) - v(t) = -\int_{t_0}^{t} v'(s)ds = \int_{t_0}^{t} z(s)\psi(s)ds$$

である。また，$\psi(t)$ は非負で weakly integrally positive なので

$$v(t_0) \geq \int_{t_0}^{\infty} z(s)\psi(s)ds > \varepsilon_0 \int_{T}^{\infty} \psi(s)ds = \infty$$

なる矛盾が導かれる。したがって，$\liminf_{t\to\infty} z(t) = 0$ であることが分かる。

Claim 2: $\limsup_{t\to\infty} z(t) = 0$. もし $\limsup_{t\to\infty} z(t) > 0$ と仮定すれば，条件 (1.5) と $b(t)$ の有界性より，ある数 β と γ が存在し，任意の $t \geq 0$ において

$$\beta \leq a(t)c(t) \quad \text{and} \quad |b(t)| \leq \gamma \quad \text{for } t > 0 \tag{2.7}$$

となる。十分小さな値 $\varepsilon > 0$ を

$$\gamma(p^*\alpha\varepsilon)^{1/p^*} < \beta(p(v_0 - \varepsilon))^{1/p^*} \tag{2.8}$$

となるように一つ固定する。Claim 1 から，$\liminf_{t\to\infty} z(t) = 0 < \limsup_{t\to\infty} z(t)$ であることに注意すれば，次の条件を満たす 2 つの発散数列 $\{\tau_n\}$ と $\{\sigma_n\}$ を選ぶことができ

る: $t_0 < \tau_n < \sigma_n < \tau_{n+1}$ であって，$z(\tau_n) = z(\sigma_n) = \varepsilon$ を満たし，任意の $t \in (\tau_n, \sigma_n)$ に対して $z(t) > \varepsilon$ となり，また，任意の $t \in (\sigma_n, \tau_{n+1})$ に対して $0 \le z(t) < \varepsilon$ となる。したがって，(2.5) を用いれば，任意の $t \in [\sigma_n, \tau_{n+1}]$ に対して

$$\frac{|x(t)|^p}{p} = v(t) - z(t) \ge v_0 - \varepsilon > 0$$

となる。この不等式から

$$|\phi_p(x(t))| = |x(t)|^{p-1} \ge (p(v_0 - \varepsilon))^{1/p^*}$$

が得られるので，(2.7) より，任意の $t \in [\sigma_n, \tau_{n+1}]$ に対して

$$a(t)c(t)|\phi_p(x(t))| \ge \beta(p(v_0 - \varepsilon))^{1/p^*} > 0 \tag{2.9}$$

であることが分かる。また，(2.3) より，任意の $t \ge t_0$ に対して

$$\frac{|y(t)|^{p^*}}{p^*\alpha} \le z(t) < \varepsilon$$

であるから，$|y(t)| \le (p^*\alpha\varepsilon)^{1/p^*}$ を得る。したがって，再び (2.7) より，任意の $t \in [\sigma_n, \tau_{n+1}]$ に対して

$$|b(t)y(t)| \le \gamma(p^*\alpha\varepsilon)^{1/p^*} \tag{2.10}$$

であることが分かる。方程式系 (S) の第 2 式に評価式 (2.9) と (2.10) を用いると，任意の $t \in [\sigma_n, \tau_{n+1}]$ に対して

$$\begin{aligned} |a(t)y'(t)| &\ge a(t)c(t)|\phi_p(x(t))| - |b(t)y(t)| \\ &\ge \beta(p(v_0 - \varepsilon))^{1/p^*} - \gamma(p^*\alpha\varepsilon)^{1/p^*} \end{aligned}$$

が得られる。また，係数 $a(t)$ の有界性より，任意の $t > 0$ に対して $|a(t)| \le \bar{a}$ が存在する。したがって，定数 μ を

$$\mu = \frac{\beta(p(v_0 - \varepsilon))^{1/p^*} - \gamma(p^*\alpha\varepsilon)^{1/p^*}}{\bar{a}}$$

のようにおけば（ε の選び方から分かるように，$\mu > 0$ である），任意の $t \in [\sigma_n, \tau_{n+1}]$ に対して，$|y'(t)| \ge \mu$ となる。この不等式の両辺を σ_n から τ_{n+1} まで積分すれば

$$\begin{aligned} |y(\tau_{n+1})| + |y(\sigma_n)| &\ge |y(\tau_{n+1}) - y(\sigma_n)| \\ &= \left| \int_{\sigma_n}^{\tau_{n+1}} y'(s)ds \right| = \int_{\sigma_n}^{\tau_{n+1}} |y'(s)|ds \\ &\ge \mu(\tau_{n+1} - \sigma_n) \end{aligned}$$

が成り立つ。正の定数 μ は n に依存しない値であり，Step 1 で示したように，すべての解は一様有界であるので，$y(t)$ は任意の $t \ge t_0$ において有界である。したがって，ある数 $\Delta > 0$ が存在し

$$\tau_{n+1} \le \sigma_n + \Delta \quad \text{for } n \in \mathbb{N} \tag{2.11}$$

が満たされることになる。

集合 I を $I = \bigcup_{n=1}^{\infty}[\tau_n, \sigma_n]$ とおけば，任意の $t \in I$ に対して，$z(t) \geq \varepsilon$ となる。したがって，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\varepsilon \int_{\tau_n}^{\sigma_n} \psi(t)dt \leq \int_{\tau_n}^{\sigma_n} z(t)\psi(t)dt = -\int_{\tau_n}^{\sigma_n} v'(t)dt = v(\tau_n) - v(\sigma_n)$$

であることが分かる。この n に関する不等式の総和を求めると，$v(t)$ が正で非増加であるから

$$\varepsilon \int_I \psi(t)dt \leq v(\tau_1) < \infty$$

が得られる。したがって，$\psi(t)$ が weakly integrally positive であることと (2.11) により

$$\liminf_{n\to\infty}(\sigma_n - \tau_n) = 0 \tag{2.12}$$

が導かれる。

さて，$\nu = \limsup_{t\to\infty} z(t)$ とおく。このとき，$\nu > \varepsilon$ であると考えてよい。Claim 1 より，次のような 2 つの発散数列 $\{t_i\}$ と $\{s_i\}$ を選ぶことができる: $t_0 < t_i < s_i < t_{i+1}$ であって，$z(t_i) = \nu/2$ かつ $z(s_i) = 3\nu/4$ を満たし，任意の $t \in (t_i, s_i)$ に対して

$$\frac{\nu}{2} < z(t) < \frac{3\nu}{4}$$

となる。数列 $\{t_i\}, \{s_i\}$ を数列 $\{\tau_n\}, \{\sigma_n\}$ と比較すると，任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して $n \in \mathbb{N}$ が存在し $[t_i, s_i] \subset [\tau_n, \sigma_n]$ となることが分かる。したがって，(2.12) より

$$\liminf_{i\to\infty}(s_i - t_i) = 0 \tag{2.13}$$

である。任意の $t \geq t_0$ に対して，解 $(x(t), y(t))$ と係数 $a(t)$ は有界であるので，ある数 $L > 0$ が存在し

$$\left|\phi_p(x(t))\phi_{p^*}\!\left(\frac{y}{a(t)}\right)\right| \leq L$$

となる。したがって，任意の $t \geq t_0$ に対して

$$\begin{aligned} z'(t) &= v'(t) - \phi_p(x(t))x'(t) = v'(t) - \phi_p(x(t))\phi_{p^*}\!\left(\frac{y}{a(t)}\right) \\ &\leq \left|\phi_p(x(t))\phi_{p^*}\!\left(\frac{y}{a(t)}\right)\right| \leq L \end{aligned}$$

が成り立つ。この不等式を t_i から s_i まで積分すれば，任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して

$$\frac{\nu}{4} = z(s_i) - z(t_i) \leq L(s_i - t_i)$$

が得られる。これは (2.13) に矛盾する。故に，$\nu = 0$ となる。言い換えると，$\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$ であることが分かる。

係数 $a(t)$ と $c(t)$ が有界であることと上記に示した Claim 2 より，$t\to\infty$ のとき，$y(t)$ も 0 に漸近することになる。このことと $t\to\infty$ のとき，$v(t)\to v_0>0$ であるという仮定より，$|x(t)|$ は正の極限値をもつことになる。したがって，条件 (1.5) より

$$\liminf_{t\to\infty} a(t)c(t)|\phi_p(x(t))|>0$$

が得られる。また，$b(t)$ の有界性より

$$\lim_{t\to\infty}|b(t)y(t)|=0$$

である。そのため

$$\liminf_{t\to\infty}|a(t)y'(t)|\geq \liminf_{t\to\infty} a(t)c(t)|\phi_p(x(t))|-\lim_{t\to\infty}|b(t)y(t)|>0$$

が得られる。したがって，$a(t)$ の有界性より

$$\liminf_{t\to\infty}|y'(t)|>0$$

である。即ち，ある数 $T>t_0$ と $M>0$ が存在し，任意の $t\geq T$ に対して，$|y'(t)|\geq M$ である。この不等式の両辺を T から $t\geq T$ まで積分すれば

$$|y(t)-y(T)|=\left|\int_T^t y'(s)ds\right|=\int_T^t|y'(s)|ds\geq M(t-T)$$

となるが，これは $t\to\infty$ のとき $y(t)$ が 0 に漸近することに矛盾する。故に，$v_0=0$ であることが分かる（Step 2 終わり）。

3 Examples and simulations

本研究で得られた結果を確認するため，いくつか例を挙げ，方程式系 (S) の解軌跡図を描画する。一般に，自励系において，初期点を固定し解軌跡を描けば，任意の初期時刻 $t_0>0$ に対しても，同じ形状になる。ところが，本研究で対象とする非自励系 (S) においては，たとえ初期点を一つに固定しても，初期時刻に応じて解軌跡の形は変化する。

本節では，パラメータ p を 3 に固定して考える。そのため，$p^*=3/2$ である。

Example 1. 係数 $a(t), b(t), c(t)$ をそれぞれ

$$a(t)=e^{-1/(1+t)},\qquad b(t)=\frac{\sin^2 t}{1+t}-\frac{1}{(1+t)^2},\qquad c(t)=e^{-4/(1+t)}$$

とする。このとき，方程式系 (S) の零解は大域的漸近安定である。

任意の $t\geq 0$ に対して，$1/e<a(t)<1, -1<b(t)<1, 1/e^4<c(t)<1$ が成り立つから，係数 $a(t), b(t), c(t)$ はいずれも有界であり，条件 (1.4) は満たされる。また，関数 $\psi(t)$

は任意の $t > 0$ において

$$\psi(t) = \frac{3}{2}e^{1/(1+t)}\left\{\frac{\sin^2 t}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2}\right\} + \frac{9}{2(1+t)^2}$$
$$= \frac{3}{2}e^{1/(1+t)}\frac{\sin^2 t}{1+t} + \frac{3}{2(1+t)^2}\left\{3 - e^{1/(1+t)}\right\}$$

となる。したがって

$$\psi(t) > \frac{3\sin^2 t}{2(1+t)} \geq 0$$

と評価されるので，任意の $t > 0$ に対して，非負で weakly integrally positive である。故に，Theorem 1 より，方程式系 (S) の零解は大域的漸近安定であることが分かる。

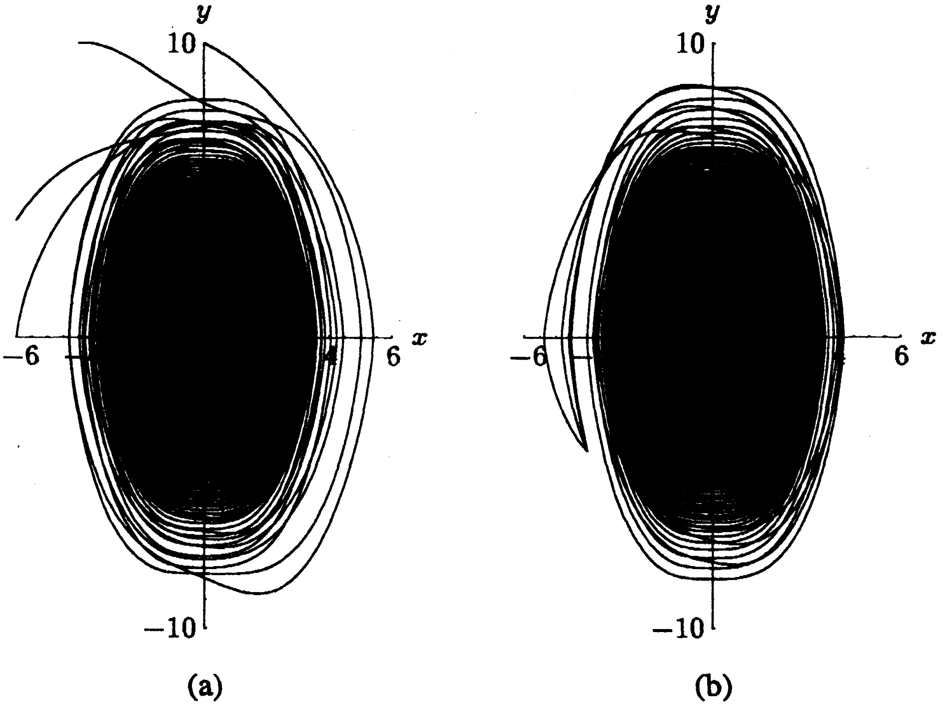

Fig. 1. Example 1 の解軌跡図

Figure 1(a) は初期時刻を $t_0 = 1$ に固定し，初期点をそれぞれ $(x_0, y_0) = (0, 10), (-4, 10), (-6, 4), (-6, 0)$ に選んだ 4 本の解軌跡を描いた図である。また，Figure 1(b) は初期点を $(-4, -4)$ に固定し，初期時刻を $t_0 = 1, 3, 5, 7$ に変化させて描いた図である。Figure 1 から，すべての解軌跡が原点の周囲を時計回りしながらゆっくりと原点に漸近していることが分かる。したがって，Figure 1 は零解が大域的漸近安定であることを示している。

次に $a(t), b(t), c(t)$ の符号が一定ではなく，変化する例を挙げる。

Example 2. 係数 $a(t), b(t), c(t)$ をそれぞれ

$$b(t) = \sin t, \qquad a(t) = c(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \in [2(m-1)\pi, (2m-1)\pi], \\ -1 & \text{if } t \notin [2(m-1)\pi, (2m-1)\pi] \end{cases}$$

とする。ただし，$m \in \mathbb{N}$ である。このとき，方程式系 (S) の零解は大域的漸近安定である。

明らかに，係数 $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ はいずれも有界である。また，任意の $t > 0$ に対して $a(t)c(t) = 1$ だから，条件 (1.4) は満たされる。また，$\psi(t) = 3|\sin t|/2$ であるので，任意の $t > 0$ に対して，非負で weakly integrally positive である。したがって，Theorem 1 より，方程式系 (S) の零解は大域的漸近安定であることが分かる。

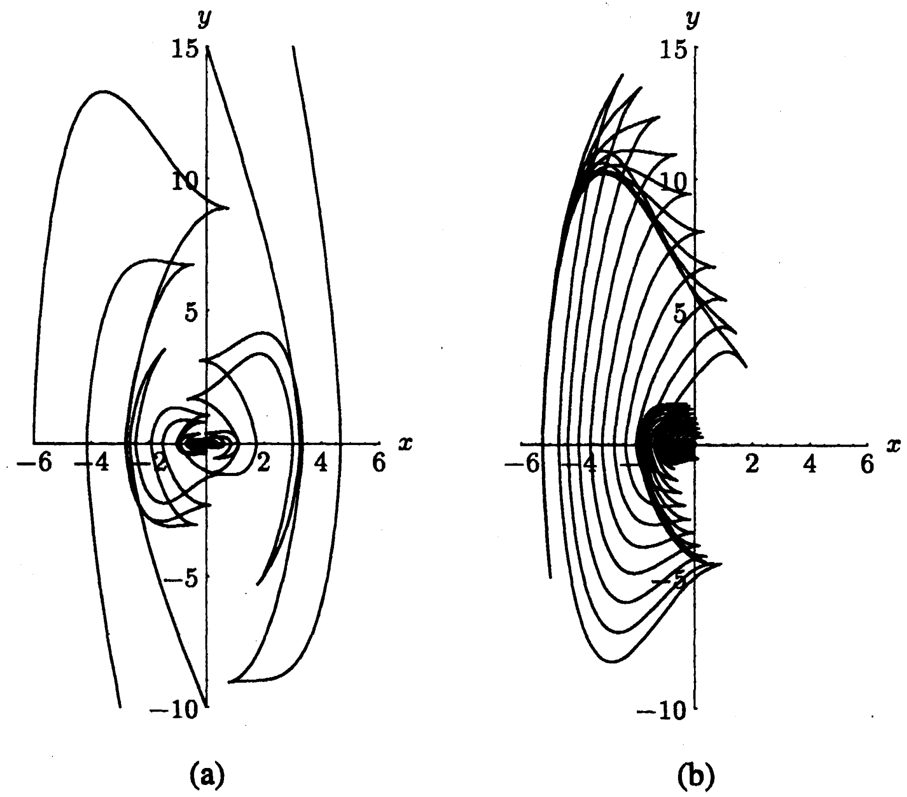

Fig. 2. Example 2 の解軌跡図

Figure 2(a) は初期時刻を $t_0 = 1$ に固定し，初期点をそれぞれ $(x_0, y_0) = (3, 15), (0, 15), (-6, 0), (-3, -10), (0, 10)$ に選んだ 5 本の解軌跡を描いた図である。また，Figure 2(b) は初期点を $(-5, -5)$ に固定し，初期時刻を $t_0 = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0$ に変化させて描いた図である。Figure 2 から，すべての解軌跡が時計回りと半時計回りを繰り返しながら原点に漸近していることが分かる。このことは変数係数 $a(t), b(t), c(t)$ の符号が変化することに起因している。

参考文献

[1] R. P. Agarwal, S. R. Grace and D. O'Regan, *Oscillation theory for second order linear, half-linear, superlinear and sublinear dynamic equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 2002.

[2] T. A. BURTON, *Volterra Integral and Differential Equations*, Academic Press, New York–London, 1983.

[3] O. DOŠLÝ, Half-linear differential equations, in: *Handbook of differential equations, Ordinary differential equations, vol. I*, pp. 161–357, A. Cañada, P. Drábek and A. Fonda (eds.), Elsevier, Amsterdam, 2004.

[4] O. DOŠLÝ and P. ŘEHÁK, *Half-linear differential equations*, North-Holland Mathematics Studies 202, Elsevier, Amsterdam, 2005.

[5] L. HATVANI, On the stability of the zero solution of certain second order non-linear differential equations, *Acta Sci. Math.* (*Szeged*) **32** (1971), 1–9.

[6] L. HATVANI, Attractivity theorems for non-autonomous systems of differential equations, *Acta Sci. Math.* (*Szeged*) **40** (1978), 271–283.

[7] L. HATVANI, On the asymptotic stability by nondecrescent Ljapunov function, *Nonlinear Anal.* **8** (1984), 67–77.

[8] L. HATVANI, On the asymptotic stability for a two-dimensional linear nonautonomous differential system, *Nonlinear Anal.* **25** (1995), 991–1002.

[9] L. HATVANI and V. TOTIK, Asymptotic stability of the equilibrium of the damped oscillator, *Diff. Integral Eqns.* **6** (1993), 835–848.

[10] J. P. LASALLE and S. LEFSCHETZ, *Stability by liapunov's direct method*, Academic Press, New York–London, 1961.

[11] V. MATROSOV, On the stability of motion, *Prikl. Mat. Meh.* **26** (1962), 885–895; translated as *J. Appl. Math. Mech.* **26** (1963), 1337–1353.

[12] J. SUGIE, M. ONITSUKA and A. YAMAGUCHI, Asymptotic behavior of solutions of nonautonomous half-linear differential systems, to appear in *Studia Sci. Math. Hungar.*

[13] T. YOSHIZAWA, *Stability theory by Liapunov's second method*, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1966.

[14] T. YOSHIZAWA, Asymptotic behaviors of solutions of differential equations, in: *Differential equations, Qualitative theory, vol. I, II* (*Szeged*, 1984), pp. 1141–1164, B. Sz.-Nagy and L. Hatvani (eds.), *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, 47, North-Holland, Amsterdam–New York, 1987.